Barisan, Deret, dan Penerapannya

Pertemuan 4

Copyright © March 2024

Definisi barisan

Barisan adalah susunan bilangan yang memiliki pola atau aturan tertentu antara satu bilangan dengan bilangan yang berikutnya.

Setiap bilangan dalam barisan bilangan disebut suku barisan. Suku ke-n dari suatu barisan diberi lambing dengan Un.

Copyright © March 2024

Jenis barisan

Barisan terbagi menjadi dua (2) yakni:

1. Barisan aritmatika/barisan hitung; barisan bilangan yang mempunyai selisih tetap antara dua suku barisan yang berurutan, selisih tersebut dinamakan beda (b)
2. Barisan geometri/barisan ukur; barisan bilangan yang memiliki nilai perbandingan yang tetap antara dua suku barisanyang berurutan. Nilai perbandingan yang tetap atau konstan tersebut dinamakan rasio (r)

Copyright © March 2024

Rumus barisan aritmatika

Rumus umum suku ke-n

$$U_n = a + (n-1)b$$

Dengan:

$U_1 = a\ (suku\ pertama)$

$b = U_n - U_{n-1}\ (beda)$

n = banyaknya suku

Beda pada barisan aritmatika

$$beda = (b)\frac{p - q}{i - j}$$

Dengan:

p = suku ke-I

q = suku ke-j

Copyright © March 2024

Contoh1:

Diketahui suatu barisan aritmatika sebagai berikut.

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37,….

Tentukanlah

a. Suku pertama (a) dan beda (b) barisan tersebut

b. Rumus umum suku ke-n (U_n)

c. Suku ke-20 (U_{20})

Jawab:

a. a = U_1= 2, beda, b = $U_2 - U_1 = 7 - 2 = 5$

b. $U_n = a + (n-1)b$

$U_n = 2 + (n-1)5$

$U_n = 2 + 5n - 5$

$U_n = 5n - 3$

c. $U_n = 5n - 3$

$U_{20} = 5(20) - 3 = 97$

Copyright © March 2024

Contoh 2:

Suatu barisan aritmatika memiliki suku pertama = 6 dan suku ketujuh = 36

Tentukanlah:

a. Beda barisan tersebut

b. Tuliskan lima suku pertama barisan tersebut

Jawab:

Diketahui suku pertama (a) = 6; suku ke-7 $U_7 = 36$

a. $U_n = a + (n-1)b$

$U_7 = 6 + (7-1)b$

$36 = 6 + 6b$

6b = 36 – 6

6b = 30

b $= \frac{30}{6}$

b = 5

b. Jika a = 6 dan b = 5 maka lima suku pertama dari barisan tersebut adalah:

6, 11, 16, 21, dan 26

Copyright © March 2024

Contoh 3:

Rumus suku ke-n suatu barisan aritmatika adalah $U_n = n^2 - 2n$ jumlah suku ke 10 dan ke-11 adalah

Jawab:

diketahui: $U_n = n^2 - 2n$, dengan demikian:

$$U_{10} = 10^2 - 2(10) = 100 - 20 = 80$$
$$U_{11} = 11^2 - 2(11) = 121 - 22 = 99$$

Jadi, $U_{10} + U_{11} = 80 + 99 = 179$

Copyright © March 2024

Rumus umum barisan geometri

Rumus umum suku ke-n dari suatu barisan geometri $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots \dots U_{n-1,} U_n$ dinyatakan dengan :

$$U_n = ar^{n-1}$$

Dengan :

$$U_1 = a\ (suku\ pertama)$$

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}\ (rasio)$$

n = banyaknya suku

Diketahui barisan geometri 3,6,12,24,48,…

Tentukanlah:

a. Rumus suku ke-n

b. Suku ke 10

Jawab:

a. Diketahui a = 3 dan

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$U_n = 3x2^{n-1}$$

b. $U_{10} = 3x2^{10-1}$

$$U_{10} = 3\ x\ 2^9$$

$$U_{10} = 3\ x\ 512$$

$$U_{10} = 1536$$

Copyright © March 2024

Contoh:

suku ke-6 suatu barisan geometri adalah 486. jika suku pertama adalah 2, tentukanlah

a. Rasio

b. Rumus suku ke-n

Jawab

a. $U_n = ar^{n-1}$

$$U_6 = 2r^{6-1}$$

$$486 = 2r^5$$

$$r^5 = \frac{486}{2}$$

$$r^5 = 243$$

$$r^5 = 3^5$$

$$r = 3$$

b. Dengan memasukkan nilai a = 2 dan r = 3 pada rumus umum suku ke-n barisan geometri akan diperoleh

Rumus $U_n = 2x3^{n-1}$

Copyright © March 2024

Contoh:

Diketahui suatu barisan geometri dengan $U_4 = 4\ dan\ U_7 = 32$

Tentukanlah

a. Suku pertama dan rasio barisan geometri tersebut

b. Suku ke 10 barisan geometri tersebut

Jawab:

$a.\quad U_4 = ar^3 \qquad \dots\dots(1)$

$U_7 = ar^6 \qquad \dots\dots(2)$

Dari persamaan 1 diperoleh :

$$ar^3 = 4, maka\ a = \frac{4}{r^3} \qquad \dots\dots(3)$$

Substitusikan dengan persamaan (3) ke persamaan (2), diperoleh:

$$ar^6 = 32, maka\ \left(\frac{4}{r^3}\right) r^6 = 32$$

$$4r^3 = 32$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

Copyright © March 2024

Contoh:

Substitusikan r = 2 pada persamaan (1), sehingga diperoleh

$ar^3 = 4$, maka $a(2^3) = 4$

8a = 4

$$a = \frac{1}{2}$$

Jadi, suku pertamanya (a) = ½ dan rasionya (r) = adalah 2

$$b. \quad U_n = ar^{n-1}$$

$$U_{10} = \frac{1}{2} x 2^9$$

$$U_{10} = \frac{1}{2} x 512$$

$$U_{10} = 256$$

Copyright © March 2024

Contoh:

Carilah nilai suku ke-11 dari suatu baris ukur dengan suku ke-4 dan ke-9 masing-masing adalah 24 dan 768!

Diketahui:

$$U_4 = 24$$
$$U_4 = ar^{4-1}$$
$$24 = ar^3 \quad \dots\dots(1)$$
$$U_9 = 768$$
$$U_9 = ar^{9-1}$$
$$768 = ar^8 \quad \dots\dots(2)$$

Persamaan (2) dan (1)

$$\frac{U_9}{U_4} = \frac{ar^8}{ar^3}$$
$$\frac{768}{24} = \frac{ar^8}{ar^3}$$
$$32 = r^5$$
$$r = \sqrt[5]{32}$$
$$r = 2$$

Mencari nilai a

$$24 = ar^3$$
$$24 = ax2^3$$
$$24 = a \text{ x } 8$$
$$a = \frac{24}{8}, a = 3$$

Mencari suku ke-11

$$U_{11} = ar^{11-1}$$
$$U_{11} = 3\ x\ 2^{11-1}$$
$$U_{11} = 3\ x\ 2^{10}$$
$$U_{11} = 3 \text{ x } 1024$$
$$U_{11} = 3072$$

Copyright © March 2024

Definisi Deret

Deret bilangan adalah jumlah suku-sukudari suatu barisan bilangan.

Jenis deret:

a. Deret aritmetika/deret hitung; jumlah suku-suku dari barisan aritmetika
b. Deret geometri/deret ukur; jumlah suku-suku dari suatu deret geometri
c. Deret geometri tidak hingga

Copyright © March 2024

Rumus umum deret aritmetika

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)\ atau\ S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Dengan:

$S_n = jumlah\ n\ suku\ pertama\ barisan\ aritmetika$

$U_1 = a\ (suku\ pertama)$

$b = U_n - U_{n-1}\ (beda)$

n = banyaknya suku

Copyright © March 2024

Contoh:

Suatu baris hitung mempunyai suku pertama bernilai 210 dengan beda antar suku sebesar 15. Tentukan nilai suku ke-sepuluh dan berapa jumlah sepuluh suku pertamanya!

Jawab:

Diketahui a = 210 dan b = 15

a.

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$U_{10} = 210 + (10-1)15$$
$$U_{10} = 210 + 9(15)$$
$$U_{10} = 210 + 135$$
$$U_{10} = 345$$

b.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(2x210 + (10-1)15)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(420 + 9(15)$$
$$S_{10} = 5(420 + 135)$$
$$S_{10} = 5(555)$$
$$S_{10} = 2775$$

atau

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(210 + 345)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(555)$$
$$S_{10} = 2775$$

Copyright © March 2024

Contoh:

Tentukanlah jumlah dari 4+9+14+19+…+74

Jawab:

Diketahui: a = 4, b = 5, dan $U_n = 74$

Mencari n terlebih dahulu

$U_n = a + (n-1)b$

$74 = 4 + (n-1)5$

74 – 4 = 5n – 5

5n = 70 + 5

5n = 75

$n = \frac{75}{5} = 15$

Dengan demikian jumlah 15 suku pertama

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2(4) + (15-1)5)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(8 + (14)5)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(8 + 70)$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(78)$$

$$S_{15} = 15(39)$$

$$S_{15} = 585$$

Copyright © March 2024

Contoh:

Diketahui suku ke-3 dan ke-7 dari suatu baris hitung masing-masing 150 dan 170. Tentukan nilai suku ke-10 baris hitung tersebut dan nilai suku ke-5 deret hitungnya!

$U_3 = 150$

$U_3 = a + (3 - 1)b$

$150 = a + (3 - 1)b$

$150 = a + 2b \quad \dots\dots(1)$

$U_7 = 170$

$U_7 = a + (n - 1)b$

$170 = a + (7 - 1)b$

$170 = a + 6b \quad \dots\dots(2)$

Persamaan 2 – persamaan 1

$170 = a + 6b \quad \dots\dots(2)$

$150 = a + 2b \quad \dots\dots(1)$

----------(-)

$20 = \quad 4b \quad \dots\dots(3)$

Sehingga;

$$b = \frac{20}{4}, b = 5$$

$$150 = a + 2(5)$$

$$150 = a + 10$$

$$a = 150 - 10, a = 140$$

Copyright © March 2024

Contoh:

Nilai suku ke-10 dari baris hitung tersebut:

$$U_{10} = a + (10 - 1)b$$
$$U_{10} = 140 + (10 - 1)5$$
$$U_{10} = 140 + (9)5$$
$$U_{10} = 140 + 45$$
$$U_{10} = 185$$

Nilai suku ke-5 dari deret hitungnya :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$
$$S_5 = \frac{5}{2}(2(140) + (5 - 1)5)$$
$$S_{10} = 2{,}5\ (280 + 20)$$
$$S_{10} = 2{,}5\ (300)$$
$$S_{10} = 750$$

Copyright © March 2024

Rumus deret geometri (ukur)

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}, untuk\ r < 1$$

$$atau$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}, untuk\ r > 1$$

Dengan:

$S_n = jumlah\ n\ suku\ pertama\ barisan\ geometri$

$U_1 = a\ (suku\ pertama)$

$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}\ (rasio)$

n = banyaknya suku

Copyright © March 2024

Contoh:

Diketahui barisan geometri 4, 8, 16, 32,…. U_n tentukanlah suku kedelapan dan jumlah delapan suku pertamanya

Jawab:

Diketahui: a = 4 dan $r = \frac{8}{4} = 2$

$a.\quad \mathrm{U_n} = \mathrm{ar^{n-1}}$

$\mathrm{U_8} = 4 \text{ x } 2^{8-1}$

$\mathrm{U_8} = 4 \text{ x } 2^{7}$

$\mathrm{U_n} = 4\ (128)$

$\mathrm{U_n} = 512$

b. Menentukan jumlah delapan suku pertamanya S_8, Karena r > 1, maka

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$S_8 = \frac{4(2^8 - 1)}{(2 - 1)}$$

$$S_8 = \frac{4(256 - 1)}{1}$$

$$S_n = 4\ (255)$$

$$S_n = 1020$$

Jadi jumlah delapan suku pertama adalah 1020

Copyright © March 2024

Contoh:

Carilah nilai deret ukur untuk **lima** suku pertama jika

$$a = 4\ dan\ r = {}^{1}/_{4}$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

$$S_5 = \frac{4(1 - 1/4^5)}{(1 - 1/4)}$$

$$S_5 = \frac{4({}^{1024}/_{1024} - {}^{1}/_{1024})}{({}^{4}/_{4} - 1/4)}$$

$$S_5 = \frac{4({}^{1023}/_{1024})}{({}^{3}/_{4})}$$

$$S_5 = \frac{\mathbf{256}}{\mathbf{1023}} : \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

$$S_5 = \frac{\mathbf{1023}}{\mathbf{256}} : \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

$$S_5 = \frac{341}{64}$$

Copyright © March 2024

Rumus umum Deret Geometri tak hingga

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Dengan: |r| < 1 atau -1 < r < 1

contoh tentukan jumlah deret geometri tak hingga berikut ini

a. 36 – 12 + 4 – 4/3 + ….

b. 5/3+5/9+5/27+….

Jawab:

a. a = 36 dan r = -1/3

$$S_\infty = \frac{36}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{36}{\frac{4}{3}} = 27$$

b. $a = \frac{5}{3}\ dan\ r = \frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

$$S_\infty = \frac{5/3}{1-(\frac{1}{3})} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Copyright © March 2024

Contoh 1 Perkembangan Usaha

Perusahaan souvenir "maju jaya" mampu menghasilkan 200 souvenir pada bulan pertama produksinya. Seiring berjalannya waktu, perusahaan tersebut mampu menambah produksinya sebanyak 50 unit setiap bulan melalui penambahan karyawan dan peningkatan produktivitas. Jika perkembangan produksi dianggap konstan, tentukanlah:

a. Banyaknya souvenir yang diproduksi pada bulan ke-7

b. Total produksi selama 7 bulan pertama

Diketahui: a = 200, b = 50 dan n= 7

a. $U_n = a + (n-1)b$

$$U_7 = 200 + (7-1)50$$
$$U_7 = 200 + (6)50$$
$$U_7 = 200 + 300$$
$$U_7 = 500$$

b. $\mathrm{S_n} = \frac{\mathrm{n}}{2}(2\mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)\mathrm{b})$

$$\mathrm{S}_7 = \frac{7}{2}(2(200) + (7-1)50)$$
$$\mathrm{S}_7 = \frac{7}{2}(400 + (6)50)$$
$$\mathrm{S}_7 = \frac{7}{2}(400 + 300)$$
$$\mathrm{S}_7 = \frac{7}{2}(700)$$
$$\mathrm{S}_7 = 2450$$

Copyright © March 2024

Contoh 2 Perkembangan Usaha

Perusahaan genteng "Sokajaya" menghasilkan 3.000 buah genteng pada bulan pertama produksinya, a = 3.000. Perusahaan mampu menambah produksinya sebanyak 500 buah setiap bulan, b = 500

Jika perkembangan produksinya konstan, maka: Banyaknya genteng yang dihasilkan pada bulan ke-lima

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$U_5 = 3000 + (5-1)500$$
$$U_5 = 3000 + (4)500$$
$$U_5 = 3000 + 2000$$
$$U_5 = 5000$$

Banyaknya genteng yang telah dihasilkan sampai dengan bulan ke-lima

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$
$$S_5 = \frac{5}{2}(2x3000 + (5-1)500)$$
$$S_5 = \frac{5}{2}(6000 + (4)500)$$
$$S_5 = \frac{5}{2}(6000 + (4)500)$$
$$S_5 = \frac{5}{2}(6000 + 2000)$$
$$S_5 = \frac{5}{2}(8000)$$
$$S_5 = 20000$$

Copyright © March 2024

Contoh 3: Bunga Pinjaman

$$I = P \,.\, r \,.\, t$$

Dimana:

I = Bunga (Rp)

P = Pokok Pinjaman (Rp)

r = Tingkat suku Bunga (%)

t = Lama Pinjaman (tahun)

Pak saleh meminjam uang sebesar Rp. 1.000.000,00 disuatu bank dengan tingkat suku bunga 12% selama setahun. Tentukanlah nilai akumulasi yang harus dibayarkan oleh pak saleh saat pengembalian pinjaman.

Diketahui:

P = 1.000.000

r = 12%

t = 1 tahun

Bunga Pinjaman:

I = P . r . t

I = 1.000.000 x 0.12 x 1

I = 120.000

Sehingga nilai akumulasi adalah 1.000.000 + 120.000 = 1.120.000,

Jadi uang yang disetorkan oleh pak saleh sebesar Rp. 1.120.000,00

Copyright © March 2024

Contoh 4: Bunga Pinjaman

Bu anita meminjam uang sebesar Rp. 6.000.000 dengan tingkat suku bunga 14% pada tanggal 5 januari 2018. tentukanlah nilai akumulasi yang harus dibayarkan oleh bu anita jika pengembalian pinjaman dilakukan pada tanggal 5 September 2018.

Diketahui:

P = Rp. 6.000.000,00

r = 14%

t = 8 bulan = 8/12 = 2/3 tahun

Bunga Pinjaman: P . t . r

I = 6.000.00 x 0,14 x 2/3

I = 560.000

Sehingga nilai akumulasi adalah 6.000.00 + 560.000 = 6.560.000,

Jadi uang yang disetorkan oleh bu anita sebesar Rp. 6.560.000

Copyright © March 2024

Bunga Majemuk

Bunga majemuk sering diartikan juga sebagai bunga yang disertakan sebagai pokok dalam perhitungan bunga simpanan atau pinjaman

Rumus:

$$A = P\,(1 + r)^n$$

Tingkat suku bunga per periode $= \frac{r}{m}$

Jumlah periode pembungaan = m x n

Dengan demikian:

$$A = P\,(1 + \frac{r}{m})^{mxn}$$

Dengan :

A = nilai akumulasi pada akhir periode tahun ke-n (Rp)

P = Pokok pinjaman (Rp)

r = tingkat suku bunga (%)

m = periode pembungaan bunga dalam setahun

n = laa pinjaman (tahun)

Bunga majemuk dibedakan menjadi 2:

a. Bunga majemuk dengan suku bunga tetap (fixed interest rate) artinya suku bunga yang ditetapkan tidak akan berubah selama jangka waktu tertentu yang telah disepakati bersama.

b. Bunga majemuk dengan suku bunga mengambang (floating interest rate) artinya suku bunga dapat mengalami perubahan atau fluktuasi sesuai dengan ketentuan perbankan atau suku bunga pasar

Copyright © March 2024

Contoh Bunga Majemuk

- Seorang nasabah meminjam uang di bank sebesar Rp 5 juta
  → P = 5.000.000
  untuk jangka waktu 3 tahun
  → n = 3
  dengan tingkat bunga 2 % per tahun → i = 2% = 0,02

  Jumlah uang pinjaman yang harus dikembalikan:

  $F = P\,(1 + i)^n$
  $= 5.000.000\,(1 + 0{,}02)^3$
  $= 5.000.000\,(1{,}02)^3$
  $= 5.000.000\,(1{,}061208)$
  $= 5.306.040$

- Jika pembayaran bunganya dihitung per semester
  (1 semester = 6 bulan)
  → m = 1 tahun/1 semester
  = 12 bulan/6 bulan
  = 2

  maka jumlah uang pinjaman yang harus dikembalikan:

  $F = P\,[1 + (i/m)]^{m \cdot n}$
  $= 5.000.000\,[1 + (0{,}02/2)]^{2 \cdot 3}$
  $= 5.000.000\,(1 + 0{,}01)^6$
  $= 5.000.000\,(1{,}01)^6$
  $= 5.000.000\,(1{,}0615201506)$
  $= 5.307.600{,}753$

Copyright © March 2024

Kasus Model Pertumbuhan Penduduk

Penduduk suatu kota berjumlah 1 juta jiwa pada tahun 1991

→ P_1 = 1.000.000 dengan tingkat pertumbuhan 4 % per tahun

→ r = 4% = 0,04

Jumlah penduduk pada tahun 2006 → P_{16} ?

$$Pt = P1(1+r)^{t-1}$$

$$P16 = 1.000.000(1+0{,}04)^{16-1}$$

$$P16 = 1.000.000(1{,}04)^{15}$$

P16 = 1.800.944

Catatan:
Jika tahun **1991** = P_1 (suku ke-1)
maka tahun 2006 = P_{16} (suku ke-16)
atau t = (2006 – 1991) + 1 = 16

Jika mulai tahun 2006 pertumbuhannya menurun menjadi 2,5 % per tahun, berapa jumlah penduduknya 11 tahun kemudian?

Karena mulai dari tahun 2016, maka jumlah penduduk tahun 2006 menjadi P_1 (suku ke-1).

Jumlah penduduk 11 tahun kemudian → P_{12} (suku ke-12)?

$$Pt = P1(1+r)^{t-1}$$

$$P12 = 1.800.944(1-0{,}025)^{12-1}$$

$$P12 = 1.800.944(0{,}975)^{11}$$

P12 = 1.363.173

Copyright © March 2024

tugas

1. Tentukanlah rumus suku ke-n dan suku yang berada di akhir setiap barisan aritmatika berikut
   a. 3,8,13,18,23, ….U10
   b. 2,9,16,23,30,…U15
   c. ¼, ¾, 5/4, …U10

2. Tentukanlah rumus suku ke-n dan suku yang berada di akhir setiap barisan geometri berikut
   a. 2,6,18,54…..U10
   b. 3,9,27,81,….U8

Copyright © March 2024

tugas

3. Pak andi meminjam uang sebesar sebesar Rp. 5.000.000,- disuatu bank dengan tingkat bunga 12% selama setahun, tentukanlah nilai akumulasi yang harus dibayarkan, jika pengembalian pinjaman dilakukan pada tanggal 10 oktober 2019

4. Ali meminjam uang sebanyak Rp. 25.000.000,- dengan suku bunga 12,5% per tahun. Apabila perhitungan bunga majemuk dilakukan setiap 6 bulan sekali, tentukanlah nilai akumulasi pada akhir tahun ke-3

Copyright © March 2024