Determinan MATRIKS dan Penerapannya

Matematika Ekonomi

Pertemuan 10

Copyright © March 2024

Determinan

Konsep yang terpenting dalam aljabar matriks adalah determinan, jika suatu matrik berbentuk bujur sangkar, umumnya disebut matriks bujur sangkar, maka elemen-elemen matriksnya dikombinasikan untuk menghitung nilai bilangan real yang disebut determinan. Determinan merupakan konsep khusus untuk menyelesaikan system persamaan linear simultan

Copyright © March 2024

Determinan matriks 1x1

Determinan matriks 1 x 1, adalah nilai elemen itu sendiri. Misalkan matriks;

A = (5) maka |A| = 5

A = (-10) maka |A| = -10

Copyright © March 2024

Determinan matriks 2 x 2

Determinan matriks 2 x 2 adalah selisih antara hasil perkalian diagonal utama dengan hasil perkalian diagonal bantu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, maka\ |A| = 4(-2) - 3(-3) = 1$$

Copyright © March 2024

Determinan matriks 3 x 3

Misalkan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dibuat menjadi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\sum U = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\sum B = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$|A| = \sum U - \sum B$$

Copyright © March 2024

Determinan matriks 3 x 3

Misalkan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dibuat menjadi:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right]$$

$$\sum U = (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(8)(4) = 225$$

$$\sum B = (3)(5)(7) + (2)(4)(9) + (1)(8)(6) = 225$$

$$|A| = \sum U - \sum B$$

$$|A| = 225 - 225$$

$$|A| = 0$$

Copyright © March 2024

Determinan metode Laplace

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Minor matriks A

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Copyright © March 2024

Determinan metode Laplace

Kofaktor matriks A

$$k_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1(-1) = -1$$
$$k_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1(1) = -1$$
$$k_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1(3) = 3$$
$$k_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -1(-3) = 3$$
$$k_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1(-1) = -1$$
$$k_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1(1) = -1$$
$$k_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 1(-1) = -1$$
$$k_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -1(-3) = 3$$
$$k_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1(-1) = -1$$

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} \mathrm{k}_{11} & \mathrm{k}_{12} & \mathrm{k}_{13} \\ \mathrm{k}_{21} & \mathrm{k}_{22} & \mathrm{k}_{23} \\ \mathrm{k}_{31} & \mathrm{k}_{32} & \mathrm{k}_{33} \end{bmatrix} K_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Copyright © March 2024

Prosedur menggunakan laplace

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; K_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Misal baris kedua yang dipilih maka

Det A = 2(3) + 1(-1) + 1(-1)

Det A = 6 -1 - 1

Det A = 4

Copyright © March 2024

Invers Matriks

Matriks A memiliki invers, yaitu A-1, jika;

- Matriks A berupa matriks bujur sangkar
- Determinan $A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{A_{dj}(A)}{DetA}$$

Adj(A) adalah hasil dari transpose matrik kofaktor

Contoh:

Tentukan invers matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Copyright © March 2024

Invers matriks

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka inverst matriks:

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{Det\ A}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}}{4}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & -0{,}25 & -0{,}25 \end{bmatrix}$$

Copyright © March 2024

Aplikasi Matriks

Penyalur minimum mineral mencatat penjualan per minggu untuk 3 jenis ukuran, yaitu A = 1500 ml, B = 1000 ml, dan C = 600 ml, di tiga tempat yang berbeda (took pengecer) . Biaya produksi setiap jenis produk yaitu A = 2250, B = 1950 C = 1750 jumlah minuman yang terjual pada setiap tempat seperti berikut:

Copyright © March 2024

Jumlah penjualan setiap toko

	A	B	C
Toko X	125	420	280
Toko Y	160	560	300
Toko Z	200	80	60

Harga eceran setiap toko

	A	B	C
Toko X	3500	3000	2250
Toko Y	3250	3100	2500
Toko Z	4000	3200	2200

Gunakan matriks perkalian untuk menghitung:

a. Biaya total per minggu setiap took
b. Penerima total per minggu setiap took
c. Keuntungan total per minggu setiap toko

Copyright © March 2024

Jumlah minimum yang terjual dari setiap toko (Q) dan biaya produksi (Rp.)

$$Q = \begin{bmatrix} 125 & 420 & 280 \\ 160 & 560 & 300 \\ 200 & 80 & 60 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 2250 \\ 1950 \\ 1750 \end{bmatrix}$$

a. Biaya total per minggu setiap took:

TC = QC

$$TC = \begin{bmatrix} 125 & 420 & 280 \\ 160 & 560 & 300 \\ 200 & 80 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2250 \\ 1950 \\ 1750 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.590.250 \\ 1.977.000 \\ 711.000 \end{bmatrix}$$

Biaya total tiap took

A; Rp. 1.590.250, B; Rp. 1.977.00, C; Rp. 711.000

Copyright © March 2024

Harga penjualan minuman di setiap toko (P)

$$P = \begin{bmatrix} 3500 & 3000 & 2250 \\ 3250 & 3100 & 2500 \\ 4000 & 3200 & 2200 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3500 & 3250 & 4000 \\ 3000 & 3100 & 3200 \\ 2250 & 2500 & 2200 \end{bmatrix}$$

TR=P.Q

$$TR = \begin{bmatrix} 125 & 420 & 280 \\ 160 & 560 & 300 \\ 200 & 80 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3500 & 3250 & 4000 \\ 3000 & 3100 & 3200 \\ 2250 & 2500 & 2200 \end{bmatrix}$$

Copyright © March 2024

- Total penerimaan toko A

$$TR_A = \begin{bmatrix} 125 & 420 & 280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3500 \\ 3000 \\ 2250 \end{bmatrix} = 2.327.500$$

- Total penerimaan toko B

$$TR_B = \begin{bmatrix} 160 & 560 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3250 \\ 3100 \\ 2500 \end{bmatrix} = 3.008.600$$

- Total penerimaan toko C

$$TR_C = \begin{bmatrix} 200 & 480 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4000 \\ 3200 \\ 2200 \end{bmatrix} = 1.118.000$$

Copyright © March 2024

- Total keuntungan per minggu setiap toko

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 2.327.500 \\ 3.008.000 \\ 1.188.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.590.250 \\ 1.977.000 \\ 711.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 737.250 \\ 1.029.000 \\ 474.000 \end{bmatrix}$$

Jadi, keuntungan total per minggu setiap toko

A = Rp. 737.250,-

B = Rp. 1.029.000,-

C = Rp. 477.000,-

Copyright © March 2024

Aplikasi invers dalam persamaan linear

Hitunglah nilai variable x dengan metode invers

$$3x_1 + 5x_2 = 30$$
$$x_1 + 2x_2 = 11$$

Bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Invers matriks A dan konstanta B

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Copyright © March 2024

Aplikasi invers dalam persamaan linear

Nilai Variabel X

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = 2(30) + (-5)(11) = 5$$
$$X_2 = (-1)(30) + (3)(11) = 3$$

Copyright © March 2024