FUNGSI NON LINIER dan penerapan dalam ekonomi

Pertemuan 6

Copyright © March 2024

Fungsi kuadrat adalah fungsi pangkat tertibggi variabelnya adalah dua. Fungsi kuadarat sering pula disebut dengan fungsi pangkat dua. Bentuk umum fungsi kuadrat dinyatakan dengan:

$$y = f((x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Dengan $a, b, c \epsilon R \; dan \; a \neq 0$

Copyright © March 2024

Untuk memudahkan dalam menggambar grafik fungsi kuadrat terlebih dahulu dicari:

1. Titik potong grafik terhadap sumbu-X (jika ada) syaratnya $y = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0$
2. Titik potong grafik terhadap sumbu-Y, syaratnya $x = 0 \rightarrow y = c$; titik yang diperoleh (0,c)
3. Persamaan sumbu simetri: $x = -\frac{b}{2a}$
4. Koordinat titik puncak: $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4A}\right), dengan\ D = b^2 - 4ac$

Copyright © March 2024

Bentuk grafik dari fugsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ memiliki dua kemungkinan , yakni parabola yang terbuka ke atas atau ke bawah.

1. Jika a bernilai positif (a>0), maka parabola terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum dan jenis nilai ekstrimnya adalah nilai y-min

2. Jika a bernilai negatif (a<0), maka parabola terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum dan jenis nilai ekstrimnya adalah nilai y-maks

Copyright © March 2024

contoh

Gambarlah grafik fungsi kuadrat dari $y = x^2 - 5x + 4$!

Jawab:

Berdasarkan $y = x^2 - 5x + 4$ diperoleh a =1, b=-5, dan c=4

a. Titik potong grafik terhadap sumbu-x, syaratnya y = 0

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x - 1)(x - 4) = 0$$
$$(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1$$
$$(x - 4) \rightarrow x = 4$$

Koordinat titik potong terhadap sumbu-x adalah (1,0) dan (4,0)

Copyright © March 2024

b. Titik potong grafik terhadap sumbu-y: syarat x = 0

$$y = x^2 - 5x + 4 \rightarrow y = 0^2 - 5(0) + 4 \rightarrow y = 4$$

Koordinat titik potong terhadap sumbu-y adalah (0,4)

c. Persamaan sumbu simetri

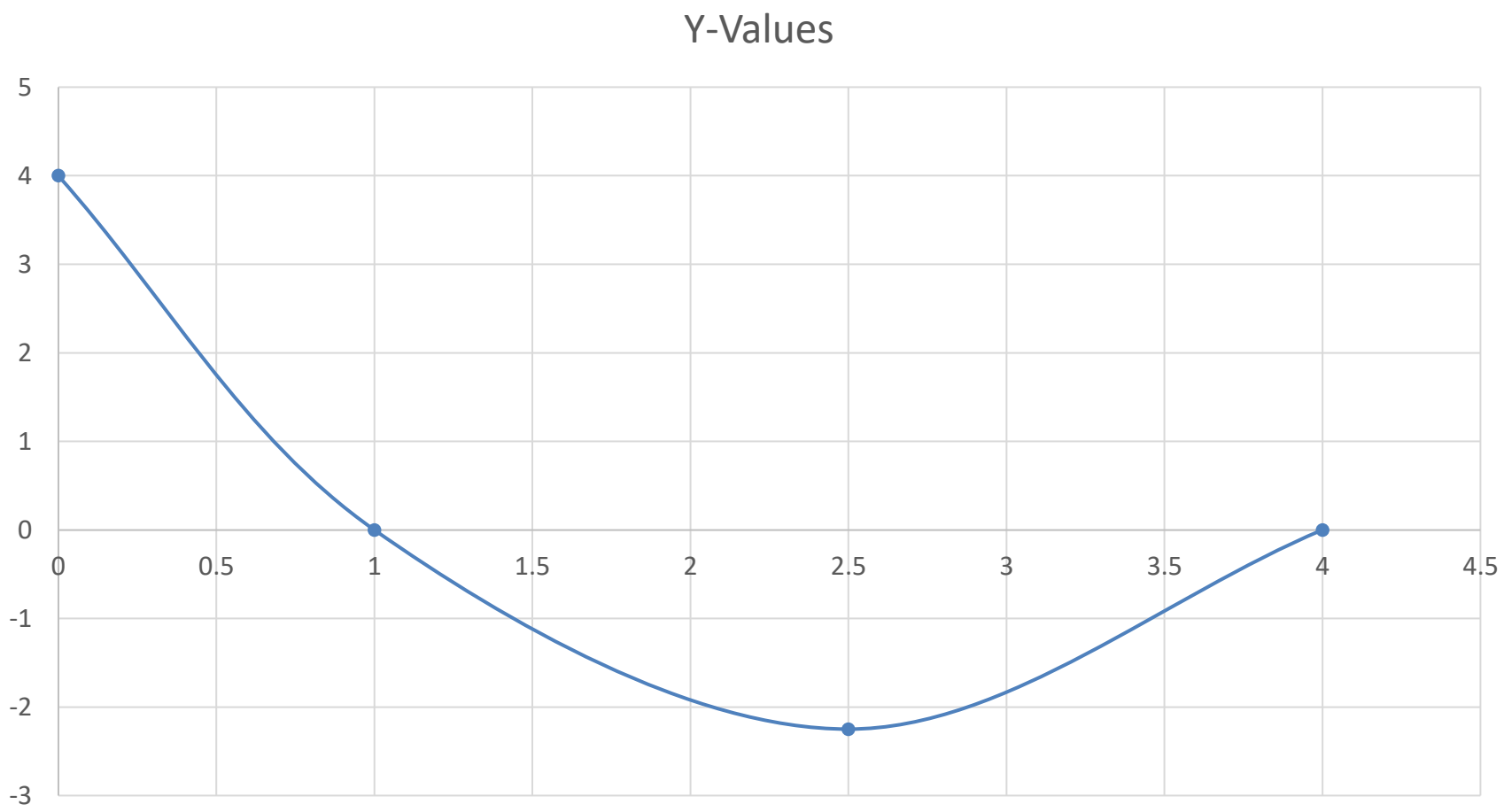
$$x = -\frac{b}{2a} \rightarrow x = -\frac{(-5)}{2(1)} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

d. Koordinat titik puncak

$$D = b^2 - 4ac \rightarrow (-5)^2 - 4(1)(4) \rightarrow 25 - 16 = 9$$

$$(x, y) = \left(2\frac{1}{2}, -\frac{9}{4(1)}\right)(x, y) = \left(2\frac{1}{2}, -2\frac{1}{4}\right)$$

Copyright © March 2024



Copyright © March 2024

contoh

Diketahui fungsi non linear $x^2 + 7x + 10$, maka tentukan

a. Titik potong grafik terhadap sumbu-x
b. Titik potong grafik terhadap sumbu-y
c. Sumbu simetri
d. Titik puncak

Berdasarkan $y = x^2 + 7x + 10$ diperoleh a =1, b=7, dan c=10

a. Titik potong grafik terhadap sumbu-x, syaratnya y = 0

$$(x + 2)(x + 5) = 0$$
$$(x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$$
$$(x + 5) \rightarrow x = -5$$

Koordinat titik potong terhadap sumbu-x adalah (-2,0) dan (-5,0)

Copyright © March 2024

b. Titik potong grafik terhadap sumbu-y: syarat x = 0

$$y = x^2 + 7x + 10 \rightarrow y = 0^2 + 7(0) + 10 \rightarrow y = 10$$

Koordinat titik potong terhadap sumbu-y adalah (0,10)

c. Persamaan sumbu simetri

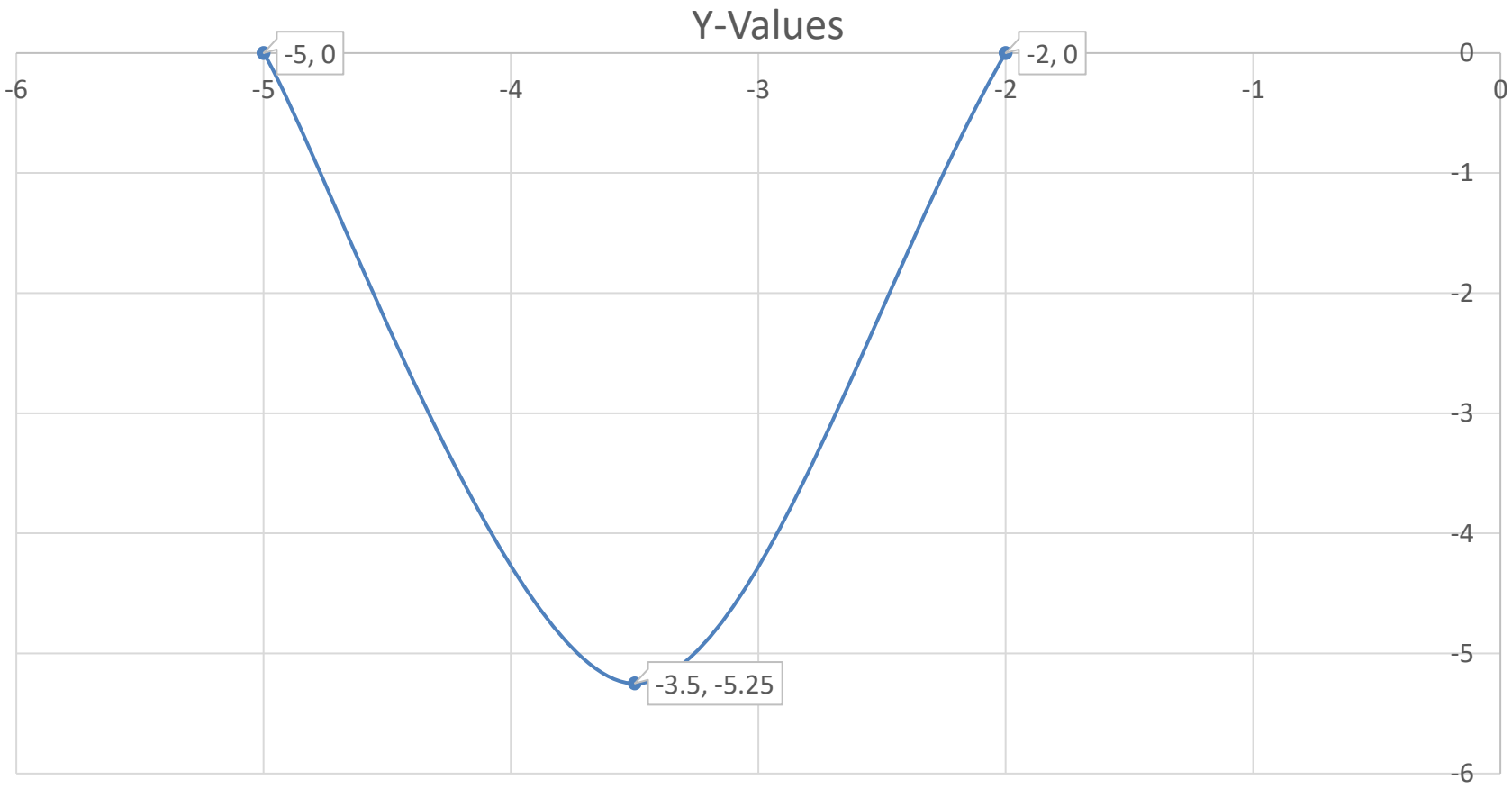
$$x = -\frac{b}{2a} \rightarrow x = -\frac{(7)}{2(1)} = -\frac{7}{2} = -3\frac{1}{2}$$

d. Koordinat titik puncak

$$D = b^2 - 4ac \rightarrow (7)^2 - 4(1)(7) \rightarrow 49 - 28 = 21$$

$$(x, y) = \left(-3\frac{1}{2}, -\frac{21}{4(1)}\right)(x, y) = \left(-3\frac{1}{2}, -5\frac{1}{4}\right)$$

Copyright © March 2024



Copyright © March 2024

Diberikan fungsi permintaan dan Penawaran dan fungsi total biaya:

Fungsi permintaan: $P_D = 50 - 0{,}2Q$

Fungsi Total Biaya: $TC = 0{,}2Q^2 + 10Q + 360$

Tentukanlah keuntungan, BEP dan daerah kerugian

Jawab:

Penerimaan total:

$$TR = P.Q = (50 - 0{,}2Q)(Q) = 50Q - 0{,}2Q^2$$

Keuntungan

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = 50Q - 0{,}2Q^2 - (0{,}2Q^2 + 10Q + 360)$$
$$\pi = 50{,}4Q^2 + 40Q - 360)$$

Copyright © March 2024

Fungsi penerimaan total

$$TR = Q\ x\ P$$
$$TR = Q\ x\ (a\ - bQ)$$
$$TR = aQ\ x\ bQ^2$$

Titik Puncak:

$$(Q, P) = (\frac{a}{2b}, \frac{a^2}{4b})$$

Kurva TR memotong sumbu Q (terjadi saat TR = 0) dititik Q = 0 dan Q $= \frac{a}{b}$

Sumbu simetrinya: Q $= \frac{a}{2b}$

Copyright © March 2024

Contoh:

Diketahui fungsi permintaan suatu barang D adalah P =30 - 3Q, tentukanlah

a. Fungsi dan kurva peneriman totalnya
b. Penerimaan total saat banyaknya barang yang diminta konsumen sebesar 3 unit

Jawab:

TR = Q x P

TR = Q x (30 - 3Q)

$$TR = 30Q - 3Q^2$$

Karena a > 0 dan b > 0, maka dari $TR = 30Q - 3Q^2$

diperoleh a =30 dan b = 3

Copyright © March 2024

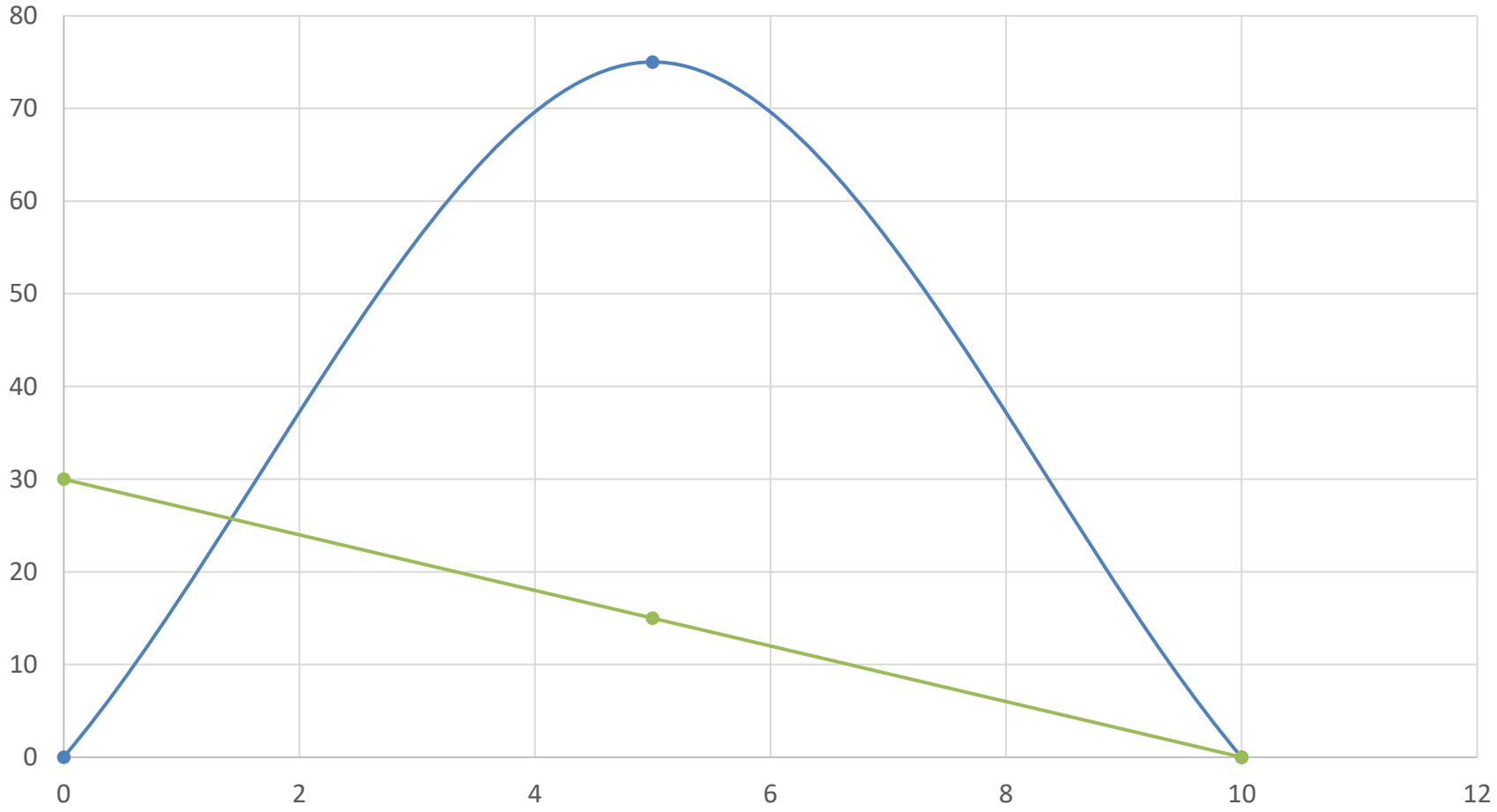
1. Titik potong terhadap sumbu-Q (terjadi saat TR=0); (0,0) dan (10,0)
2. Titik puncak

$$(Q,P) = (\frac{30}{2(3)}, \frac{(30)^2}{4(3)})$$
$$(Q,P) = (\frac{30}{6}, \frac{900}{12})$$
$$(Q,P) = (5\,,75)$$

Penerimaan total (saat Q = 3)

$$TR = 30Q - 3Q^2$$
$$TR = 30(3) - 3(3)^2$$
$$TR = 90 - 27 = 63$$

Copyright © March 2024



Copyright © March 2024

Contoh Fungsi Permintaan

$P = 16 - Q^2$ ... (i)

$a = -1,\ b = 0,\ c = 16$

maka:

- Parabola terbuka ke bawah (karena $a < 0$)
- Titik ekstrim (puncak):

$$(Q_p, P_p) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

$$= \left(-\frac{0}{2(-1)}, \frac{(0)^2 - 4(-1)(16)}{-4(-1)}\right)$$

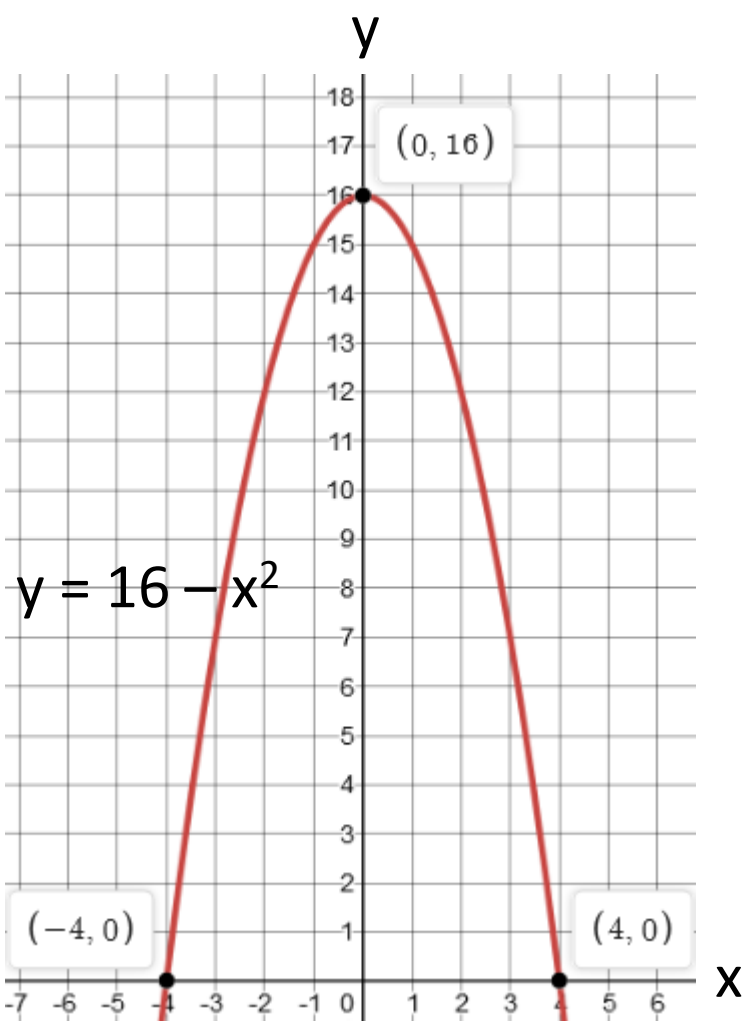
$$= \left(-\frac{0}{-2}, \frac{0 + 64}{4}\right)$$

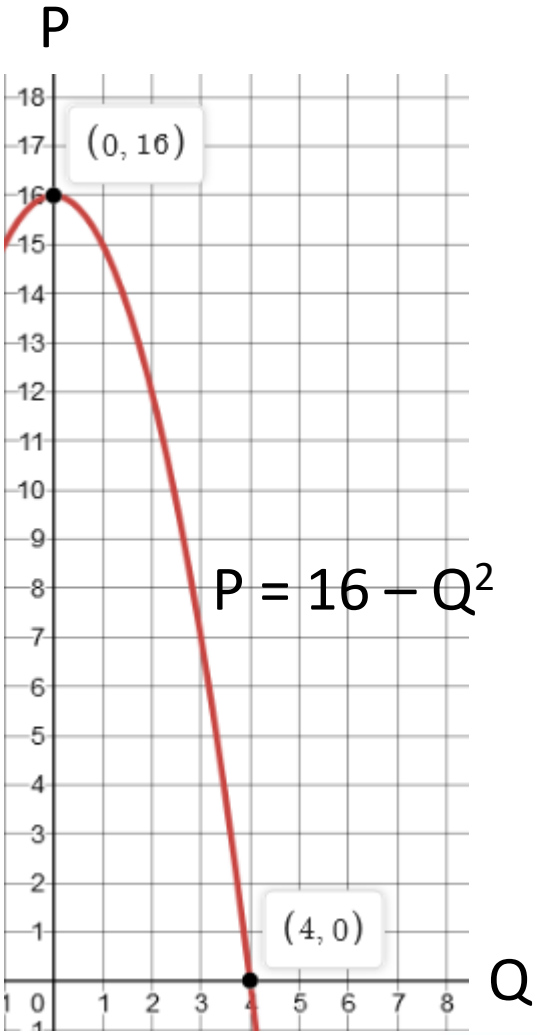
$$= (0, 16)$$

- Perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat:
  - Dengan sumbu P:
    $Q = 0 \rightarrow$ (i) $\rightarrow P = 16$
    $\rightarrow$ Titik potong: (0, 16)
  - Dengan sumbu Q:
    $P = 0 \rightarrow$ (i)
    $\rightarrow 0 = 16 - Q^2$
    $0 = (4 + Q)(4 - Q)$
    $Q_1 = -4$ (TM)
    $Q_2 = 4$
    $\rightarrow$ Titik potong: (4, 0)

Copyright © March 2024

Grafiknya adalah parabola $P = 2Q^2 + 4Q + 6$ yang terletak di kuadran I ($Q \geq 0$ & $P \geq 0$)





Copyright © March 2024

Contoh Fungsi Penawaran

$P = 2Q^2 + 4Q + 6$ ... (i)

$a = 2, b = 4, c = 6$

maka:

- Parabola terbuka ke atas (karena $a > 0$)
- Titik ekstrim (puncak):

$$(Q_p, P_p) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{2(2)}, \frac{(4)^2 - 4(2)(6)}{-4(2)}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{4}, \frac{16 - 48}{-8}\right)$$

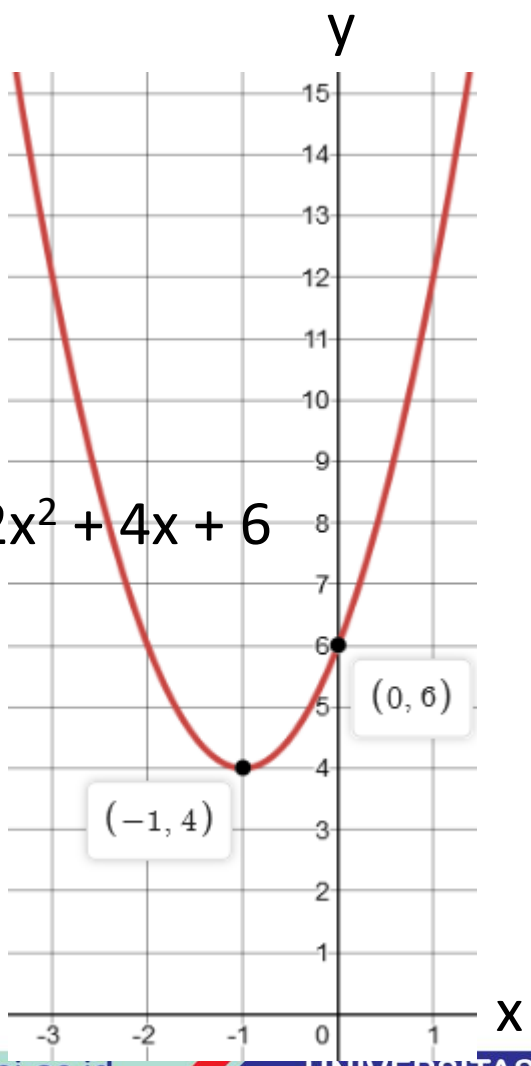
$$= (-1, 4)$$

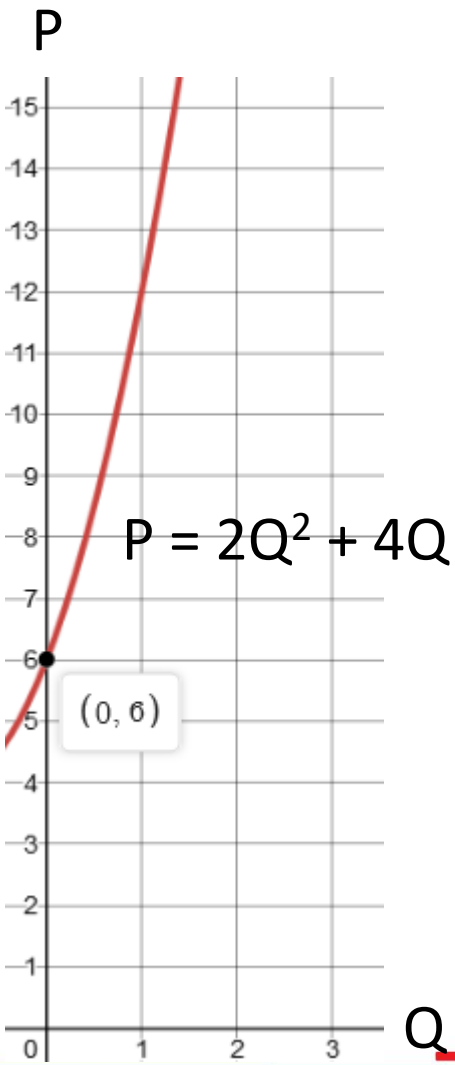
- Perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat:
  - Dengan sumbu P:
    $Q = 0 \rightarrow$ (i) $\rightarrow P = 6$
    $\rightarrow$ Titik potong: (0, 6)
  - Dengan sumbu Q:
    $P = 0 \rightarrow$ (i)
    $\rightarrow 0 = 2Q^2 + 4Q + 6$
    Tidak ada nilai Q yang memenuhi !
    $\rightarrow$ Parabola tidak berpotongan dengan sumbu Q

Copyright © March 2024

Grafiknya adalah parabola $P = 2Q^2 + 4Q + 6$ yang terletak di kuadran I ($Q \geq 0$ & $P \geq 0$)

$y = 2x^2 + 4x + 6$





$P = 2Q^2 + 4Q + 6$

Copyright © March 2024

Contoh 1 Kasus Keseimbangan Pasar

$$P_d = 24 - 3Q^2 \quad \ldots \text{ (i)}$$
$$P_s = Q^2 + 2Q + 4 \quad \ldots \text{ (ii)}$$

Menentukan harga dan jumlah keseimbangan:

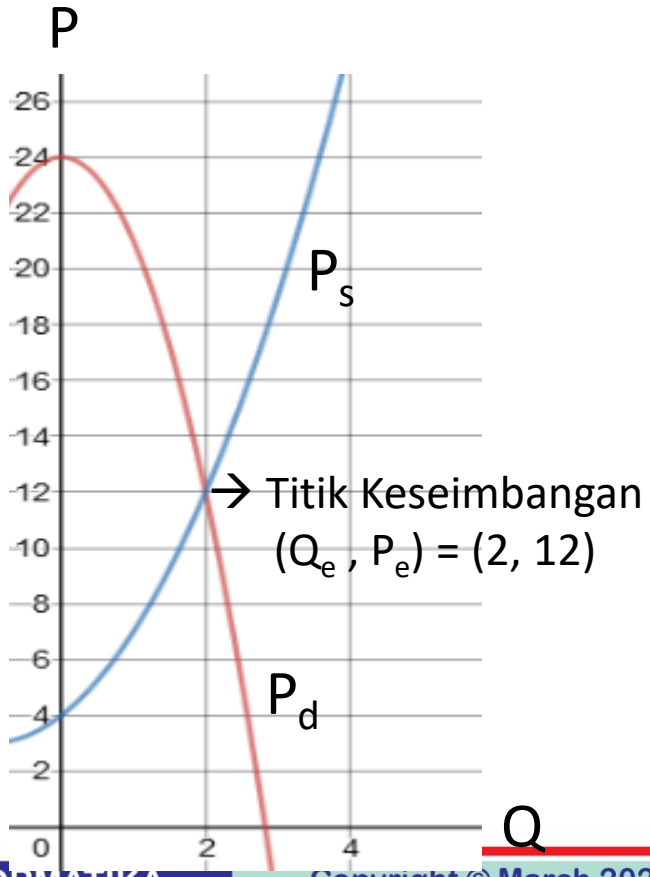
$$P_d = P_s$$
$$24 - 3Q^2 = Q^2 + 2Q + 4$$
$$0 = 4Q^2 + 2Q - 20$$
$$0 = 2Q^2 + Q - 10$$
$$0 = (2Q + 5)(Q - 2)$$

$Q_1 = -5/2$ (TM) & $Q_2 = 2$

$Q_e = 2 \rightarrow$ (i) $\rightarrow P_e = 12$

jumlah keseimbangan = 2

harga keseimbangan = 12



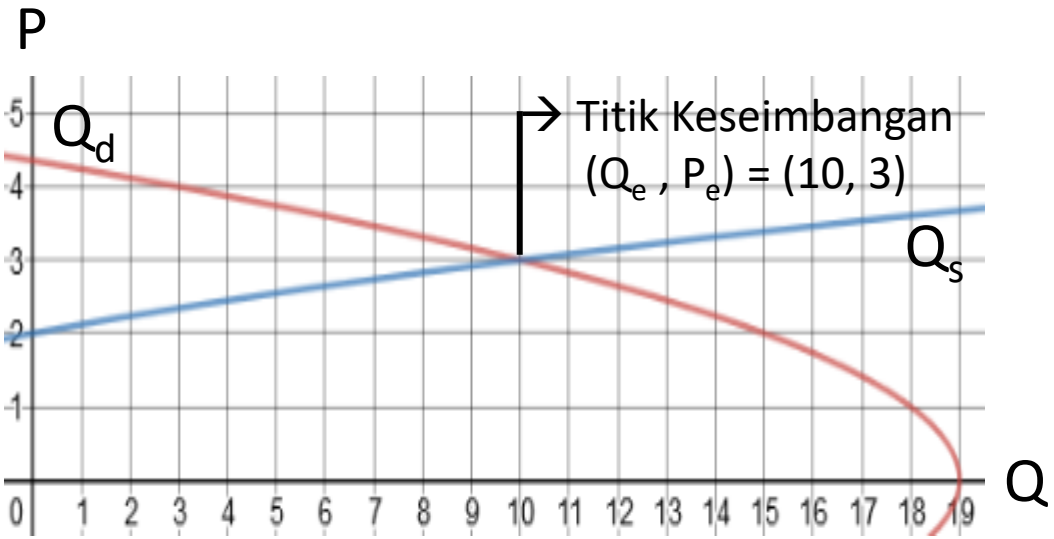
Copyright © March 2024

Contoh 2 Kasus Keseimbangan Pasar

$$Q_d = 19 - P^2 \quad \ldots \quad (i)$$
$$Q_s = -8 + 2P^2 \quad \ldots \quad (ii)$$

Menentukan harga dan jumlah keseimbangan:

$$Q_d = Q_s$$
$$19 - P^2 = -8 + 2P^2$$
$$0 = 3P^2 - 27$$
$$0 = 3(P^2 - 9)$$
$$0 = P^2 - 9$$



$P_1 = -3$ (TM) & $P_2 = 3$

$P_e = 3 \rightarrow$ (i) $\rightarrow Q_e = 10$

harga keseimbangan = 3

jumlah keseimbangan = 10

Copyright © March 2024

Latihan Soal 1

Diketahui fungsi permintaan:

$P = 900 – 1,5Q$

maka:

- Penerimaan totalnya:

  $R = Q \times P$
  $= Q(900 – 1,5Q)$
  $= 900Q – 1,5Q^2$

- Jika terjual barang sebanyak 200 unit (Q = 200), maka:

  → Penerimaan totalnya:
  $R = 900(200) – 1,5(200)^2$
  $= 180.000 – 60.000$
  $= 120.000$

  → Harga jual per unitnya:
  $AR = R/Q$
  $= 120.000/200 = 600$

- Jika produksi dinaikkan menjadi 250 unit (Q' = 250), maka:

  $R' = 900(250) – 1,5(250)^2$
  $= 225.000 – 93.750$
  $= 131.250$

  $\Delta R = R' – R$
  $= 131.250 – 120.000$
  $= 11.250$

  $\Delta Q = Q' – Q$
  $= 250 – 200 = 50$

  → Penerimaan Marjinalnya:
  $MR = \Delta R/\Delta Q$
  $= 11.250/50 = 225$

Copyright © March 2024

Latihan Soal 1 (lanjutan)

Persamaan penerimaan total:

$R = 900Q - 1{,}5Q^2$

$a = -1{,}5,\ b = 900,\ c = 0$

→ parabola terbuka ke bawah,

→ memiliki titik maksimum:

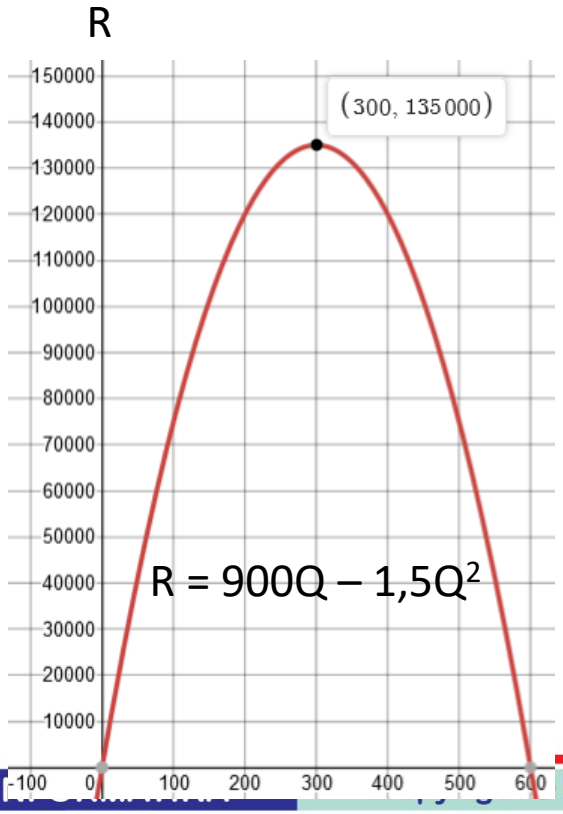
$$= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a} \right)$$

$$= \left(-\frac{900}{2(-1{,}5)}, \frac{(900)^2 - 4(-1{,}5)(0)}{-4(-1{,}5)} \right)$$

$$= \left(-\frac{900}{-3}, \frac{810000 - 0}{6} \right)$$

$$= (300, 135000) \rightarrow (Q_p, R_p)$$

- Tingkat penjualan yang meng-hasilkan penerimaan total maksimum → $Q = Q_p = 300$
- Besarnya penerimaan total maksimum → $R = R_p = 135.000$



Latihan Soal 2

Diketahui:

Persamaan penerimaan total:

$R = -0{,}10Q^2 + 20Q$

Persamaan biaya total:

$C = 0{,}25Q^3 – 3Q^2 + 7Q + 20$

- Jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 unit (Q = 10), maka:

  Penerimaan totalnya:

  $R = -0{,}10(10)^2 + 20(10)$

  $= -10 + 200 = 190$

  Biaya totalnya:

  $C = 0{,}25(10)^3–3(10)^2+7(10)+20$

  $= 250 – 300 + 70 + 20 = 40$

  R > C → Profit sebesar 150

- Jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 20 unit (Q = 20), maka ...

  Penerimaan totalnya:

  $R = -0{,}10(20)^2 + 20(20)$

  $= -40 + 400 = 360$

  Biaya totalnya:

  $C = 0{,}25(20)^3–3(20)^2+7(20)+20$

  $= 2000 – 1200 + 140 + 20$

  $= 960$

  R < C → Rugi sebesar 600

Copyright © March 2024

Latihan Soal 3

Diketahui fungsi produksi:

$P = 9x^2 - x^3$

maka:

- Produk rata-ratanya:

  $AP = P/x$

  $= (9x^2 - x^3)/x$

  $= 9x - x^2$

- Jika digunakan masukan sebanyak 6 unit (x = 6), maka:

  → Produk totalnya:

  $P = 9(6)^2 - (6)^3$

  $= 324 - 216 = 108$

  → Produk rata-ratanya:

  $AP = 9(6) - (6)^2$

  $= 54 - 36 = 18$

  atau

  $AP = P/x = 108/6 = 18$

- Jika masukan yang digunakan ditambah 1 unit ($\Delta x = 1$), maka:

  $x' = x + \Delta x = 6 + 1 = 7$

  $P' = 9(7)^2 - (7)^3 = 98$

  $\Delta P = P' - P = 98 - 108 = -10$

  → Produk Marjinalnya:

  $MP = \Delta P/\Delta x = -10/1 = -10$

Copyright © March 2024