Differensial dan Penerapan Differensial

Pertemun 12

Copyright © March 2024

Differensial / turunan

Turunan / diferensial dari suatu fungsi f dilambangkan dengan f’ (dibaca “f aksen”) dan di definisikan sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Selain notasi f’(x) terdapat pul notasi lainnya yang dapat kita gunakan untuk menyatakan turunan dari y = f(x) terhadap x, di antaranya sebagai berikut:

1. $\frac{dy}{dx}$dibaca “dydx”
2. y’ dibaca “y aksen”
3. $\frac{d}{dx}[f(x)]$dibaca “df(x)dx”
4. $D_x[f(x)]$

Dengan demikian ,

$$f'(x) = y'^{\frac{dy}{dx}} = \frac{d}{dx}[f(x)] = D_x[f(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Copyright © March 2024

contoh

Dengan menggunakan definisi turunan, carilah turunan pertama dari f(x) = 2x + 1

Jawab:

f(x)= 2x +1

f(x + h) = 2(x + h) + 1 = 2x + 2h + 1

Dengan demikian,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2x + 2h + 1) - (2x + 1)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h + 1 - 2x - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \to 0} 2 = 2$$

jadi, turunan pertama dari f(x) = 2x +1 adalah f'(x) = 2

Copyright © March 2024

Kaidah-kaidah turunan pertama

1. Turunan dari suatu konstanta k adalah nol

f(x) = k, f'(x) = 0

Contoh: f(x) = 5, f'(x) = 0

2. Turunan pertama dari suatu fungsi aljabar dengan variable berpangkat n adalah hasil perkalian antara n dengan variable tersebut berpangkat (n-1)

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} atau\ f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$$

Contoh:

$$f(x) = 2x^4 \rightarrow f'(x) = 4.2x^{4-1} = 8x^3$$

Copyright © March 2024

Kaidah-kaidah turunan pertama

3. Turunan pertama dari perkalian suatu konstanta dan fungsi sama dengan perkalian antara konstanta tersebut dengan turunan pertama fungsi

$$f(x) = cf'(x) = g'(x) = cf'(x)$$

Contoh: $g(x) = 5x^3 \rightarrow g'(x) = 5\,(3x^2) = 15x^2$

4. Turunan pertama dari penjumlahan atau pengurangan dua fungsi sama dengan penjumlahan atau pengurangan dari turunan masing-masing fungsi tersebut.

$$y = f(x) \pm g(x) \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

Contoh:

$$y = 5x^2 + 3x \rightarrow y' = 10x + 3$$

Copyright © March 2024

Kaidah-kaidah turunan pertama

5. Turunan pertama dari perkalian dua fungsi sama dengan perkalian antara turunan fungsi pertama dengan fungsi kedua ditambah dengan perkalian antara turunan fungsi kedua dengan fungsi pertama.

Misalkan dua fungsi tersebut dinyatakan dengan u = f(x) dan v = g(x), sehingga

$$y = u.v \rightarrow y' = u'v + uv'$$

Contoh: tentukan turunan pertama dari $f(x) = (x^2 + 5x)(3x - 5)$!

Diketahui:

$u = x^2 + 5x \rightarrow u' = 2x + 5$

$v = 3x + 5 \rightarrow v' = 3$

Sehingga

$$y' = u'v + uv'$$

$$y' = (2x + 5)\big((3x - 5) + (x^2 + 5x\big)(3) \quad y' = (6x^2 + 5x - 25) + (3x^2 + 15x)$$

$$y' = 9x^2 + 20x - 25$$

Copyright © March 2024

Kaidah-kaidah turunan pertama

6. Turunan pertama dari pembagian dua fungsi dinyatakan sebagai berikut.

Misalkan dua fungsi tersebut dinyatakan dengan u = f(x) dan v = g(x), sehingga

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Contoh: tentukan turunan pertama dari $f(x) = \frac{5x^2+4}{7x-3}$!

Diketahui:

$u = 5x^2 + 4 \rightarrow u' = 10x$, $\quad v = 7x - 3 \rightarrow v' = 7$

Sehingga

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad y' = \frac{10x(7x-3) - (5x^2+4)(7)}{(7x-3)^2}$$

$$y' = \frac{70x^2 - 30x - (35x^2+28)}{49x^2 - 42x + 9} \qquad y' = \frac{35x^2 - 30x - 28}{49x^2 - 42x + 9}$$

Copyright © March 2024

Kaidah-kaidah turunan pertama

7. Turunan pertama dari suatu fungsi berpangkat n, misalkan fungsi tersebut dinyatakan dengan u = f(x)m, sehingga;

$$y = u^n \rightarrow y' = nu^{n-1}.u'$$

Contoh: tentukan turunan pertama dari $y = (2x^3 - 7)^4$

$$u = 2x^2 - 7 \rightarrow u' = 6x^2$$
$$n = 4$$
$$y' = 4(2x^3 - 7)^{4-1}.(6x^2)$$
$$y' = 24x^2(2x^3 - 7)^3$$

Copyright © March 2024

Kaidah-kaidah turunan pertama

8. Turunan pertama dari logaritma dinyatakan sebagai berikut.

$$y = a_{\log x} \rightarrow y' = \frac{1}{x} a_{\log e}$$

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

Contoh: $y = a_{\log(3x^2+5x-2)} \rightarrow y' = \frac{6x+5}{3x^2 \mp 5x-2} 2_{\log e}$

Copyright © March 2024

Fungsi naik dan fungsi turun

Turunan pertama suatu fungsi dapat digunakan untuk menentukan interval saat fungsi menaik atau menurun.

Dengan mengetahui interval-interval tersebut, maka kita bisa menentukan letak titik maksimum dan minimum fungsi

Fungsi $y = f(x)$ dengan turunan pertama $y' = f'(x)$, maka:

1. Fungsi dikatakan bertambah atau naik jika $f'(x) > 0$;
2. Fungsi dikatakan berkurang atau turun jika $f'(x) < 0$

Copyright © March 2024

contoh

Diketahui $f\ (x) = 5 - x^2$, dengan mencari turunan pertamanya diperolehh f'(x) = -2x.

Untuk setiap nilai x yang positif, f'(x) < 0 dan merupakan fungsi yang menurun. Sebaliknya, untuk setiap nilai x yang negative f'(x) > 0 dan merupakan fungsi menaik.

Tentukan interval dimana fungsi $f(x) = \ 1/3x^3 + 5/2x^2 + 6x$ naik dan turun!

Jawab:

$$f(x) = \ 1/3x^3 + 5/2x^2 + 6x \qquad f'(x) = x^2 + 5x + 6$$

Copyright © March 2024

a. Fungsi f naik jika memenuhi $f'(x) > 0$, sehingga:

$$x^2 + 5x + 6 > 0$$
$$(x + 2)(x + 3) > 0$$

Nilai pembuat nol adalah x = -2 atau x =-3, koefisien x^2 positif dan daerah yang diminta > 0 sehingga penyelesaiannya x < -3 atau x > -2

Fungsi f naik pada interval $\{x|x < -3\ atau\ x > -2, x\varepsilon R\}$

b. Fungsi f turun jika memenuhi $f'(x) < 0$, sehingga:

$$x^2 + 5x + 6 > 0$$
$$(x + 2)(x + 3) > 0$$

Nilai pembuat nol adalah x = −2 atau x =−3, koefisien x^2 positif dan daerah yang diminta < 0 sehingga penyelesaiannya −3 < x < −2

Fungsi f turun pada interval $\{x| - 3 < x < -2, x\varepsilon R\}$

Copyright © March 2024

Contoh

Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik:

$$y = -x^3 + 15x^2 - 48x \quad \ldots \quad (i)$$

Jawaban

$y' = -3x^2 + 30x - 48$

$y'' = -6x + 30 \quad \ldots \quad (ii)$

Syarat titik ekstrim: y' = 0

$-3x^2 + 30x - 48 = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x - 2)(x - 8) = 0$

$x_1 = 2; x_2 = 8$

$x_1 = 2 \rightarrow (i) \rightarrow y_1 = -44$

$x_2 = 8 \rightarrow (i) \rightarrow y_2 = 64$

$x_1 = 2 \rightarrow (ii) \rightarrow y'' = 18 > 0$

Karena $y'' > 0$, maka $(x_1, y_1) = (2, -44)$ adalah titik minimum.

$x_2 = 8 \rightarrow (ii) \rightarrow y'' = -18 < 0$

Karena $y'' < 0$, maka $(x_2, y_2) = (8, 64)$ adalah titik maksimum.

Copyright © March 2024

Contoh (lanjutan)

$y = -x^3 + 15x^2 - 48x$ ... (i)

$y' = -3x^2 + 30x - 48$

$y'' = -6x + 30$

Syarat titik belok: $y'' = 0$

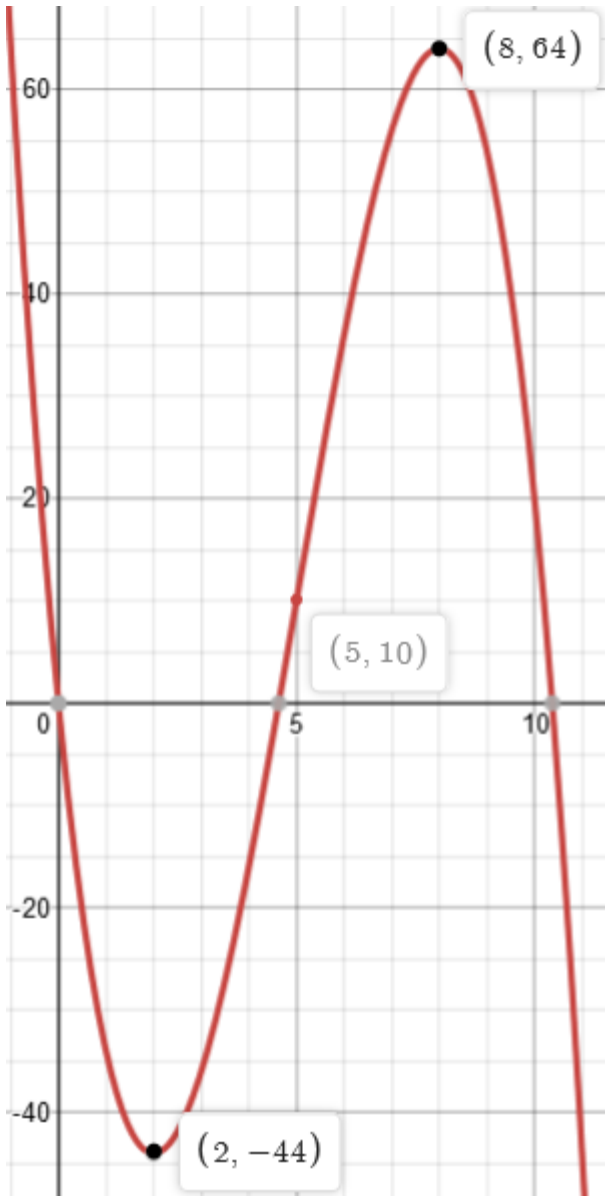
$-6x + 30 = 0$

$-6x = -30$

$x = 5$

$x = 5 \rightarrow$ (i) $\rightarrow y = 10$

$\rightarrow$ titik belok = (5, 10)



Copyright © March 2024

Latihan Soal (lanjutan)

Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik

$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 40$ ... (i)

Jawaban

$y' = 3x^2 - 18x + 15$

$y'' = 6x - 18$ ... (ii)

$y' = 0$ (titik ekstrim)

$3x^2 - 18x + 15 = 0$

$(3x - 3)(x - 5) = 0$

$x_1 = 1; x_2 = 5$

$x_1 = 1 \rightarrow$ (i) $\rightarrow y_1 = 47$

$x_2 = 5 \rightarrow$ (i) $\rightarrow y_2 = 15$

$x_1 = 1 \rightarrow$ (ii) $\rightarrow y'' = -12 < 0$

Karena $y'' < 0$, maka $(x_1, y_1) = (1, 47)$ adalah titik maksimum.

$x_2 = 5 \rightarrow$ (ii) $\rightarrow y'' = 12 > 0$

Karena $y'' > 0$, maka $(x_2, y_2) = (5, 15)$ adalah titik minimum.

Copyright © March 2024

Latihan Soal (lanjutan)

$y = x^3 - 9x^2 + 15x + 40$ ... (i)

$y' = 3x^2 - 18x + 15$

$y'' = 6x - 18$

$y'' = 0$ (titik belok)

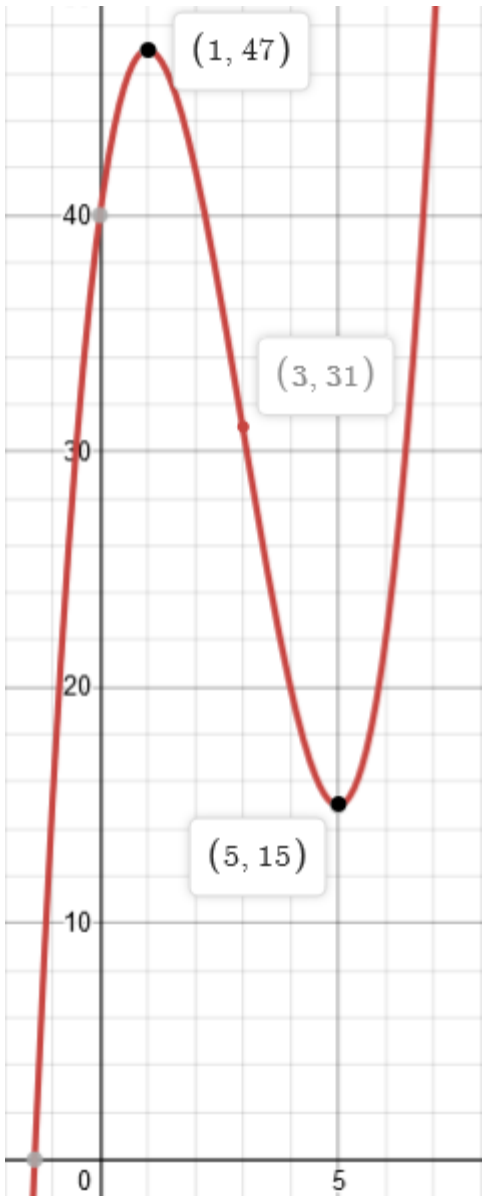
$6x - 18 = 0$

$6x = 18$

$x = 3$

$x = 3 \rightarrow$ (i) $\rightarrow y = 31$

$\rightarrow$ titik belok = (3, 31)



Copyright © March 2024

Perilaku konsumen

$$TU = f(Q)$$

$$MU = \frac{dTU}{dQ}$$

Hubungan antara kepuasan total (TU) dan kepuasan marginal (MU) adalah sebagai berikut:

a. TU akan meningkat saat MU bernilai positif (MU >0)

b. TU akan mencapai maksimum saat MU = 0

c. TU akan menurun ketika MU bernilai negative (MU<0)

Copyright © March 2024

Elastisitas Permintaan

- Menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta karena adanya perubahan harga barang.
- Merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga barang.
- Jika fungsi permintaan $Q_d = f(P)$, maka elastisitas permintaannya adalah:

$$\eta d = [dQ_d/dP]\cdot[P / Q_d]$$
$$= Q_d'\cdot[P / Q_d]$$

Copyright © March 2024

Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat:

- **Elastik, jika |ηd| > 1**, artinya jika harga barang berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaannya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar dari persentase perubahan harganya.
- **Elastik Uniter, jika |ηd| = 1**, artinya jika harga barang berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaannya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang sama dengan persentase perubahan harganya.
- **Inelastik, jika |ηd| < 1**, artinya jika harga barang berubah sebesar persentase tertentu, maka permintaannya akan berubah (secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih kecil dari persentase perubahan harganya.

Copyright © March 2024

Contoh Kasus

Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_d = 25 - 3P^2$. Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5.

Jawaban

$Q_d = 25 - 3P^2$

$Q_d' = -6P$

$\eta d = Q_d' \cdot [P / Q_d]$

$= -6P\ [P / (25 - 3P^2)]$

$= -6P^2 / (25 - 3P^2)$ ... (i)

$P = 5 \rightarrow$ (i) $\rightarrow \eta d = 3$

$|\eta d| = 3 > 1 \rightarrow$ elastik

Artinya:

- Jika harga barang naik 1% maka jumlah barang yang diminta akan berkurang 3%
- Jika harga barang turun 1% maka jumlah barang yang diminta akan bertambah 3%

Copyright © March 2024

Elastisitas Penawaran

- Menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan karena adanya perubahan harga barang.
- Merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga barang.
- Jika fungsi penawaran $Q_s = f(P)$, maka elastisitas penawarannya adalah:

$$\eta s = [dQ_s/dP]\cdot[P / Q_s]$$
$$= Q_s'\cdot[P / Q_s]$$

Copyright © March 2024

Penawaran akan suatu barang dikatakan bersifat:

- **Elastik, jika |ηs| > 1**, artinya jika harga barang berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannya akan berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih besar dari persentase perubahan harganya.
- **Elastik Uniter, jika |ηs| = 1**, artinya jika harga barang berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannya akan berubah (secara searah) dengan persentase yang sama dengan persentase perubahan harganya.
- **Inelastik, jika |ηs| < 1**, artinya jika harga barang berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannya akan berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil dari persentase perubahan harganya.

Copyright © March 2024

Contoh Kasus

Fungsi penawarannya akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_s = -200 + 7P^2$. Tentukan elastisitas penawarannya pada tingkat harga P = 10.

Jawaban

$Q_s = -200 + 7P^2$

$Q_s' = 14P$

$\eta s = Q_s' \cdot [P / Q_s]$

$= 14P\ [P/(-200 + 7P^2)]$

$= 14P^2/(-200 + 7P^2)$ ... (i)

$P = 10 \rightarrow$ (i) $\rightarrow \eta s = 2{,}8$

$|\eta s| = 2{,}8 > 1 \rightarrow$ elastik

Artinya:

- Jika harga barang naik 1% maka jumlah barang yang ditawarkan akan bertambah 2,8%
- Jika harga barang turun 1% maka jumlah barang yang ditawarkan akan berkurang 2,8%

Copyright © March 2024

Elastisitas Produksi

- Menunjukkan besarnya perubahan jumlah output yang dihasilkan karena adanya perubahan jumlah input.
- Merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah output terhadap persentase perubahan jumlah input.
- Jika fungsi produksi $P_r = f(x)$, maka elastisitas produksinya adalah:

$$\eta p = [dP_r / dx] \cdot [x / P_r]$$
$$= P_r' \cdot [x / P_r]$$

Copyright © March 2024

Produksi suatu barang dikatakan bersifat:

- **Elastik, jika $|\eta p| > 1$**, artinya jika jumlah input berubah sebesar persentase tertentu, maka jumlah outputnya akan berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih besar dari persentase perubahan inputnya.
- **Elastik Uniter, jika $|\eta p| = 1$**, artinya jika jumlah input berubah sebesar persentase tertentu, maka jumlah outputnya akan berubah (secara searah) dengan persentase yang sama dengan persentase perubahan inputnya.
- **Inelastik, jika $|\eta p| < 1$**, artinya jika jumlah input berubah sebesar persentase tertentu, maka jumlah outputnya akan berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil dari persentase perubahan inputnya.

Copyright © March 2024

Contoh Kasus

Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan oleh persamaan $P_r = 6x^2 - x^3$. Tentukan elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan faktor produksi sebanyak 3 unit.

Jawaban

$P_r = 6x^2 - x^3$

$P_r' = 12x - 3x^2$

$\eta p = P_r' \cdot [x / P_r]$

$= (12x - 3x^2)[x/(6x^2 - x^3)]$

$= (12x^2 - 3x^3)/(6x^2 - x^3)$

$x = 3 \rightarrow \eta p = 1$

$|\eta p| = 1 \rightarrow$ elastik uniter

Artinya:

- Jika jumlah input dinaikkan 1% maka jumlah outputnya akan bertambah 1%
- Jika jumlah input diturunkan 1% maka jumlah outputnya akan berkurang 1%

Copyright © March 2024

Latihan Soal 1

Diketahui :

Biaya total: $C = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$ ... (i)

Biaya Marjinal: $MC = C' = 3Q^2 - 6Q + 4$ ... (ii)

Tentukan besarnya MC minimum dan biaya totalnya.

Jawaban

Syarat MC minimum:

$(MC)' = 0$

$6Q - 6 = 0$

$6Q = 6$

$Q = 1$

→ MC minimum pada tingkat produksi Q = 1

$Q = 1$ → (ii) → $MC = 1$

$Q = 1$ → (i) → $C = 6$

→ MC minimum = 1 dengan biaya total = 6

Copyright © March 2024

Latihan Soal 2

Diketahui fungsi permintaan: $P = 16 - 2Q$ ... (i)

Tentukan:

- Fungsi penerimaan total & penerimaan marjinalnya.
- Besarnya penerimaan total maksimum & permintaannya.

Jawaban

Penerimaan Total:

$\mathbf{R = Q \times P}$

$= Q(16 - 2Q)$

$= 16Q - 2Q^2$ ... (ii)

Penerimaan Marjinal:

$\mathbf{MR = R'} = 16 - 4Q$

Syarat R maksimum:

$\mathbf{R' = 0}$

$16 - 4Q = 0 \rightarrow Q = 4$

$Q = 4 \rightarrow$ (ii) $\rightarrow R = 32$

$Q = 4 \rightarrow$ (i) $\rightarrow P = 8$

$\rightarrow$ R maksimum = 32 dengan permintaan = 8

Copyright © March 2024

Latihan Soal 3

Diketahui :

Utilitas: $U = f(Q) = 90Q - 5Q^2$ ... (i)

Utilitas Marjinal: $MU = U' = 90 - 10Q$

Tentukan besarnya U maksimum.

Jawaban

Syarat U maksimum:

$$\mathbf{U' = 0}$$

$$90 - 10Q = 0$$

$$90 = 10Q$$

$$Q = 9$$

$Q = 9 \rightarrow$ (i) $\rightarrow$ $U = 405$ (U maksimum)

Copyright © March 2024

Latihan Soal 4

Diketahui :

Produksi total: $P = f(x) = 9x^2 - x^3$ ... (i)

Produk Marjinal: $MP = P' = 18x - 3x^2$ ... (ii)

Tentukan besarnya P maksimum dan MP maksimum.

Jawaban

Syarat P maksimum:

$$P' = 0$$

$18x - 3x^2 = 0$

$3x(6 - x) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 6$

$x = 0 \rightarrow$ (i) $\rightarrow P = 0$

$x = 6 \rightarrow$ (i) $\rightarrow P = 108$

$\rightarrow$ P maksimum = 108

Syarat MP maksimum:

$$(MP)' = 0$$

$18 - 6x = 0$

$18 = 6x$

$x = 3$

$x = 3 \rightarrow$ (ii) $\rightarrow MP = 27$

$\rightarrow$ MP maksimum = 27

Copyright © March 2024

Latihan Soal 5

Diketahui :

Penerimaan total: $R = r(Q) = -2Q^2 + 1000Q$

Biaya total: $C = c(Q) = Q^3 – 59Q^2 + 1315Q + 2000$

Tentukan besarnya keuntungan (π) maksimum.

Jawaban

$\pi = R – C$

$= (-2Q^2 + 1000Q) – (Q^3 – 59Q^2 + 1315Q + 2000)$

$= -Q^3 + 57Q^2 – 315Q – 2000$ ... (i)

Syarat π maksimum:

$$\pi' = 0$$

$-3Q^2 + 114Q – 315 = 0$

$(-3Q + 105)(Q – 3) = 0$

$Q_1 = 35 ; Q_2 = 3$

$Q = 35 \rightarrow$ (i) $\rightarrow \pi = 13.925$

$Q = 3 \rightarrow$ (i) $\rightarrow \pi = -2.459$

$\rightarrow \pi$ maksimum $= 13.925$

Copyright © March 2024